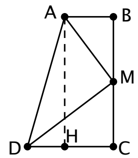
SOLUZIONI

1) La base minore AB del trapezio rettangolo in figura misura 27, mentre la base maggiore DC misura 48. Il punto medio dell'altezza BC è indicato con M e le rette AM e DM sono perpendicolari. Quanto misura l'altezza del trapezio?



R. Indichiamo con x la misura di BM e di MC. Il teorema di Pitagora applicato al triangolo ABM ci permette di trovare: $AM^2 = BM^2 + AB^2 = x^2 + 27^2$. Analogamente, applicando lo stesso teorema al triangolo CDM si trova: $DM^2 = CM^2 + DC^2 = x^2 + 48^2$. Applichiamo ora il teorema di Pitagora al triangolo AMD: $AD^2 = AM^2 + DM^2 = 2x^2 + 27^2 + 48^2$. D'altra parte possiamo trovare AD anche applicando lo stesso teorema al triangolo ADH in figura, tenendo conto che $AH = 2x$ e che $DH = CD - AB = 48 - 27 = 19$. Si ottiene: $AD^2 = AH^2 + DH^2 = 4x^2 + 19^2$. I due risultati ottenuti per AD^2 sono uguali, questo conduce all'equazione: $2x^2 + 27^2 + 48^2 = 4x^2 + 19^2$, da cui si ricava $x = 36$. Quindi l'altezza cercata misura 72.

2) I numeri di Fibonacci a_n sono definiti dalle relazioni

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \end{cases}$$

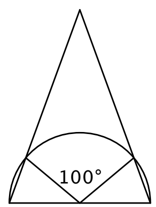
Il valore di a_{13} è...

R. Il calcolo diretto fornisce $a_{13} = 233$. Questo numero non è pari, né un quadrato, né divisibile per 3 o per 13. Quindi la risposta corretta è la (D) ed in effetti 233 è primo.

3) Il signor Rossi non mente mai, tranne che di mercoledì, quando mente sempre. In quali giorni della settimana può dire: "Se non ho mentito ieri, allora mentirò domani."?

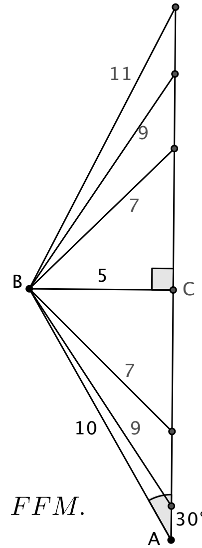
R. La frase di cui sopra è falsa se pronunciata di venerdì, sabato, domenica e lunedì, ma siccome in tali giorni Rossi dice sempre il vero egli non la può pronunciare. Di martedì la frase è vera e Rossi la può dire. Di mercoledì la frase è falsa e Rossi la può dire (perché in quel giorno mente sempre). Di giovedì la frase è vera, perché il giorno prima Rossi ha sicuramente mentito, quindi la può dire anche in quel giorno.

4) Il diametro di una circonferenza è anche la base di un triangolo isoscele. L'arco di circonferenza interno al triangolo corrisponde ad un angolo di 100° (vedi figura). Quanto misura l'angolo al vertice del triangolo?



R. I due triangolini isosceli uguali interni al cerchio hanno l'angolo al vertice di 40° e quindi gli angoli alla base di 70°. Perciò anche il triangolo grande ha gli angoli alla base di 70° e l'angolo al vertice è di 40°.

5) Di un triangolo ABC si sa che l'angolo in A è di 30°, che il lato AB misura 10 e che la misura del lato BC è uno degli elementi in $\{3, 5, 7, 9, 11\}$. Quanti sono i triangoli diversi che soddisfano queste condizioni?



R. La distanza del punto B dalla retta AC è uguale a 5, quindi questa è anche la misura minima del lato BC. Come si vede dalla figura, ci sono inoltre 2 punti sulla semiretta AC che distano 7 da B, due che distano 9 e uno solo che dista 11. In totale i possibili triangoli sono quindi 6.

6) Il signor Rossi ha quattro figli. Il figlio maggiore è un maschio, così come almeno uno degli altri figli. Qual è la probabilità che il figlio minore sia una femmina?

R. Ci sono 7 possibili combinazioni per il sesso dei tre figli minori:

$$MMM \quad MMF \quad MFM \quad MFF \quad FMM \quad FMF \quad FFM.$$

(La combinazione FFF non è possibile perché almeno uno dei tre figli deve essere maschio). Queste combinazioni sono equiprobabili e in 3 di esse il figlio minore è femmina, quindi la probabilità è 3/7.

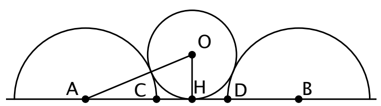
7) Un rettangolo, un quadrato ed un cerchio hanno la stessa area ed hanno perimetri r, q e c rispettivamente. Quale delle seguenti disuguaglianze è vera?

R. Se indichiamo con A l'area delle tre figure, il lato del quadrato è $\sqrt{A}$ e quindi $q = 4\sqrt{A}$. Invece il raggio del cerchio è $\sqrt{A/\pi}$ e quindi $c = 2\pi\sqrt{A/\pi} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{A}$. Siccome $2\sqrt{\pi} < 4$, ne deduciamo che $c < q$. Se ora indichiamo con x la misura di un lato del rettangolo, l'altro lato misura A/x e quindi $r = 2(x + A/x)$. Ma è facile verificare che $2(x + A/x) \geq 4\sqrt{A}$, infatti questa disequazione equivale a $x^2 - 2\sqrt{A}x + A \geq 0$, ovvero $(x - \sqrt{A})^2 \geq 0$, che è sempre verificata. In conclusione possiamo dire che $c < q \leq r$.

8) Quanti sono i numeri interi positivi n minori di 2006, tali che $\sqrt[3]{96n}$ sia un numero intero?

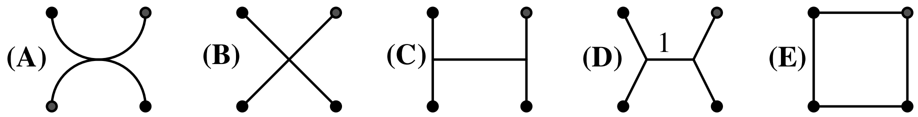
R. Siccome $96 = 2^5 \cdot 3$, affinché $96n$ sia un cubo perfetto deve essere $n = 2 \cdot 3^2 \cdot m^3$, dove m è un numero intero qualsiasi. Per $m = 5$ si ha $n = 18 \cdot 125 = 2250 > 2006$, quindi m deve essere minore di 5 e dunque i possibili valori di n sono 4.

9) Due circonferenze di raggio 24 hanno centri A e B; anche la loro distanza CD misura 24. Quanto misura il raggio della circonferenza tangente ad entrambe le circonferenze e alla retta AB?



R. Se indichiamo con x la misura del raggio cercato, si ha $AO = 24 + x$, $OH = x$ e $AH = 36$, sicché il teorema di Pitagora applicato al triangolo AOH fornisce l'equazione $(24 + x)^2 = x^2 + 36^2$, che risolta dà $x = 15$.

10) Quattro villaggi sono situati ai vertici di un quadrato con i lati di lunghezza 2. Sono stati proposti cinque progetti (illustrati qui sotto) per una rete di strade che unisca i villaggi. Quale progetto prevede la minima lunghezza totale delle strade?



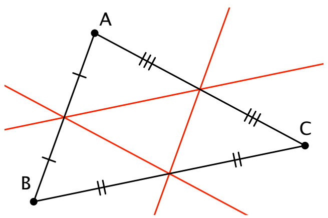
R. È facile calcolare che: lunghezza(A) $= 2\pi$, lunghezza(B) $= 4\sqrt{2}$, lunghezza(C) $= 6$ e lunghezza(E) $= 8$, sicché fra queste la lunghezza minima è quella del caso (B). Nel caso (D) le due strade che partono dai vertici di sinistra sono i due lati obliqui di un triangolo isoscele che ha per base il segmento che congiunge i due vertici di sinistra. Quindi la base misura 2 e l'altezza ad essa relativa $1/2$, sicché col teorema di Pitagora si ricava che ogni lato obliquo misura $\sqrt{5}/2$. La lunghezza totale delle strade nel caso (D) è perciò $2\sqrt{5}+1$, che è minore di $4\sqrt{2}$ (infatti $2\sqrt{5}+1 < 4\sqrt{2}$ elevando al quadrato entrambi i membri equivale a $21+4\sqrt{5} < 32$, cioè $4\sqrt{5} < 11$, ovvero $80 < 121$, che è vera). Quindi la risposta corretta è (D).

11) Un padre divide un certo numero di monete d'oro fra i suoi tre figli. Il primo figlio riceve metà delle monete più una. Il secondo figlio riceve un terzo delle monete rimanenti. Quante monete possedeva il padre, come minimo, se il terzo figlio riceve più di 10 monete?

R. Indichiamo con n il numero di monete del padre e con x il numero di monete ricevute dal secondo figlio. Secondo e terzo figlio insieme ricevono $3x$ monete, sicché in particolare il terzo figlio riceve $2x$ monete e quindi $x > 5$. Il primo figlio riceve $n - 3x$ monete, ma questo numero deve essere la metà di n più uno, ciò che porta all'equazione: $n - 3x = (n/2) + 1$, da cui: $n = 6x + 2$. Il valore minimo di x è 6, quindi n come minimo vale 38.

12) Dati tre punti nel piano non allineati, quante sono le rette del piano equidistanti dai tre punti?

R. Se tre punti A, B e C sono equidistanti da una retta r e stanno nello stesso semipiano, allora i tre punti giacciono su una retta parallela a r, il che contraddice l'ipotesi che i tre punti non siano allineati. Quindi i tre punti non possono stare tutti dalla stessa parte della retta r: due di essi (ad esempio A e B) staranno da una stessa parte e il terzo (C) invece dalla parte opposta.



La retta r è allora quella che passa per i punti medi di AC e BC e risulta parallela ad AB. Invece di prendere A e B dalla stessa parte di r possiamo prendere A e C, oppure B e C, ottenendo altre due possibili soluzioni. Le rette cercate sono quindi in tutto 3, come mostrato in figura.