SOLUZIONI

1) $\pi^3 \cdot 3^\pi$ è uguale a:

(A) $(3\pi)^{3\pi}$ (B) $(3\pi)^{3+\pi}$ (C) $(3+\pi)^{3\pi}$ (D) 1 (E) nessuno dei precedenti

R. La risposta corretta è la (E).

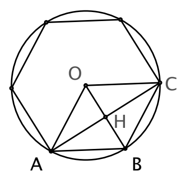
2) Se $\dfrac{a+p}{b-p} = \dfrac{4a}{3b}$, allora p è uguale a...

R. Togliendo i denominatori l'equazione data diventa $(a+p)\cdot 3b = 4a\cdot(b-p)$, da cui $(4a+3b)p = ab$ e quindi $p = \dfrac{ab}{4a+3b}$.

3) Sia n il più piccolo numero intero positivo tale che il prodotto $1260 \cdot n$ sia il cubo di un numero intero. Allora n soddisfa...

R. Si ha che $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, quindi per ottenere un cubo n deve essere come minimo $2\cdot 3\cdot 5^2 \cdot 7^2 = 7350$.

4) Un esagono regolare è inscritto in una circonferenza di raggio R. La lunghezza di una diagonale dell'esagono che non passa per il centro della circonferenza è uguale a...



R. La diagonale AC è il doppio dell'altezza AH del triangolo equilatero ABO. Ma $AH = (\sqrt{3}/2)OB$ e quindi $AC = R\sqrt{3}$.

5) In quanti modi diversi è possibile dividere 10 mele fra Aldo, Bruno e Carlo, in modo che Aldo abbia almeno 3 mele, Bruno e Carlo almeno 2 ciascuno, e Carlo non più di 3?

R. Come si vede dalla tabella, ci sono 7 modi diversi.

Aldo	3	3	4	4	5	5	6
Bruno	5	4	4	3	3	2	2
Carlo	2	3	2	3	2	3	2

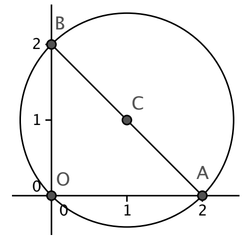
6) Un numero è formato da due cifre seguite da un 4, mentre un altro numero è formato dalle stesse due cifre, nello stesso ordine, ma precedute da un 4. La differenza fra il secondo numero e 400 è esattamente uguale alla differenza fra 400 e il primo numero. La somma delle due cifre sconosciute è uguale a...

R. Se x e y sono le due cifre cercate, il primo numero è $100x + 10y + 4$ ed il secondo è $400 + 10x + y$. La condizione data equivale a: $(400 + 10x + y) - 400 = 400 - (100x + 10y + 4)$, cioè: $110x + 11y = 396$. Dividendo entrambi i membri per 11 otteniamo $10x + y = 36$, quindi $x = 3$ e $y = 6$.

7) Il pavimento di una stanza rettangolare è coperto interamente di mattonelle quadrate e la metà delle mattonelle è disposta lungo il perimetro del pavimento. Quante sono le possibili stanze, di diverse dimensioni, che soddisfano questa condizione?

R. Siano x e y il numero di piastrelle lungo il lato corto e il lato lungo del pavimento (quindi $x \le y$). Le piastrelle in totale sono xy mentre quelle lungo il perimetro sono $2x + 2y - 4$. Otteniamo quindi l'equazione $2x + 2y - 4 = xy/2$, da cui esplicitando y si ricava: $y = 4(x-2)/(x-4)$. Per ottenere un numero positivo deve essere $x > 4$ e d'altra parte x deve essere minore di 7 altrimenti sarebbe $y < x$. Quindi le possibili soluzioni sono 2: $(x = 5, y = 12)$ e $(x = 6, y = 8)$.

8) Una circonferenza nel piano cartesiano ha il centro nel punto $(1;1)$ e passa per l'origine. Qual è l'area della porzione del primo quadrante interna alla circonferenza?



R. L'area cercata è la somma dell'area del semicerchio di diametro AB e del triangolo AOB. Poiché $AC = \sqrt{2}$ l'area del semicerchio è π, mentre l'area del triangolo è 2. Quindi l'area totale è $\pi + 2$.

9) Quanti sono i numeri primi, minori di 10000, che hanno la somma delle cifre uguale a 2?

R. Oltre a 2, tali numeri devono contenere due cifre 1 ed un numero qualunque di zeri. Inoltre la cifra delle unità deve essere 1, altrimenti il numero non sarebbe primo. I possibili numeri di questo tipo minori di 10000 sono 11, 101 e 1001. I primi due sono primi, invece 1001 è divisibile per 11. Quindi i numeri cercati sono tre: 2, 11 e 101.

10) Se $0 < x \le 1$, allora...

R. Se $0 < x \le 1$ allora $0 < x^2 \le x \le 1$ e quindi $0 < x \le \sqrt{x} \le 1$. Invece il reciproco di un numero compreso fra 0 e 1 è maggiore di 1 e tanto più grande quanto più il numero è prossimo a zero. Quindi deve essere: $x \le \sqrt{x} \le 1 \le 1/\sqrt{x} \le 1/x$.

11) Un quadrato ha la diagonale che misura 2. La sua area vale...

R. Possiamo usare la regola per l'area del rombo: area $= (2\cdot 2)/2 = 2$.

12) Se n è un intero positivo, definiamo il numero $n!$ come il prodotto di tutti gli interi da 1 a n: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$. Se facciamo ora l'addizione

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 2005! + 2006!$$

qual è la cifra delle unità della somma risultante?

R. Osserviamo che da 5! in poi tutti gli addendi della somma hanno come cifra delle unità 0: $5! = 120$, $6! = 6\cdot 5! = 6\cdot 120 = 720$, ecc. Quindi la cifra delle unità della somma è la stessa della somma dei primi quattro addendi: $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$. Perciò la risposta corretta è 3.