La matematica: bellezza, verità ed enlightenment

Liceo Giulio Cesare, 25 febbraio 2014

Carlo Cellucci
carlo.cellucci@uniroma1.it

Study shows that the brain reacts to beautiful mathematics in the same way as great art

13 February 2014

Semir Zeki

"When one looks at a formula rated as beautiful it activates the emotional brain - the medial orbito-frontal cortex - like looking at a great painting or listening to a piece of music," said Professor Semir Zeki, lead author of the paper.

- Dall’antichità, filosofi e matematici hanno stabilito una relazione tra matematica e bellezza.

Aristotele

- “**Sbagliano coloro i quali affermano che le scienze matematiche non hanno nulla da dire sul bello**”.

- “**Le matematiche hanno molto da dire su**” **di esso**, in particolare “**ne fanno conoscere gli effetti e le ragioni**, e quindi non si può dire che non dicano nulla su di esso”.

- Nell’ultimo secolo, la relazione tra matematica e bellezza è stata riaffermata da molti filosofi e matematici.

Russell

- “**La matematica**, considerata correttamente, possiede non solo verità, ma anche **suprema bellezza**,” una bellezza “**sublimemente pura**, e **capace di quell’alta perfezione che solo la grandissima arte sa esprimere**”.

Poincaré

- “Il **senso della bellezza matematica**, dell’armonia dei numeri e delle forme e dell’eleganza geometrica” è “**un reale senso estetico** che tutti i veri matematici riconoscono”

- ed è “capace di sviluppare in noi un certo tipo di **emozione estetica**”.

Hardy

- “**Le forme create dal matematico**, come quelle create dal pittore o dal poeta, **devono essere belle**”.

- “La bellezza è il requisito fondamentale: **nel mondo non c’è un posto permanente per la matematica brutta**”.

- Alcune di queste affermazioni sono eccessive e sono state contestate.

- Per esempio, è stata contestata l’affermazione di **Hardy** che **nel mondo non c’è un posto permanente per la matematica brutta**.

Hersh & John-Steiner

- "**Non è difficile trovare parti permanenti della matematica che nessuno pensa siano belle**".

- Per esempio, "a un livello elementare, si può citare la 'formula quadratica'

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- che risolve l'equazione generale quadratica $ax^2 + bx + c = 0$.

- Questa è **una delle formule matematiche più note**. **Ma non è bella**!".

- **Perciò non si può dire che tutte le parti permanenti della matematica siano belle**.

- D’altro canto sembra esserci ampio consenso sul fatto che **alcuni enti matematici – dimostrazioni, teoremi – siano belli**,

- e che perciò si possa parlare di ‘**bellezza matematica**’.

- Questo pone il problema di spiegare **che cosa si intenda per ‘bellezza matematica’**.

Due tradizioni filosofiche sulla bellezza matematica

1) La bellezza matematica è una **proprietà intrinseca di certi enti matematici** (dimostrazioni, teoremi), perciò è **indipendente dall'osservatore**.

2) La bellezza matematica è una **proiezione dell'osservatore**. Se certi enti matematici hanno **proprietà che soddisfano i criteri estetici dell'osservatore**, l'osservatore **proietterà bellezza** su quegli enti e li descriverà come belli.

La bellezza matematica come proprietà intrinseca: Platone

- “Rette e circoli, e le figure piane o solide che si generano a partire da essi mediante compassi, righe e squadre, **non sono belli solo relativamente ad altre cose**, ma **sono sempre belli in se stessi per natura**”.

- “Essi **non sono belli in un certo momento e non belli in un altro momento**, né **belli in un certo senso e brutti in un altro**, né **belli in un certo luogo e brutti in un altro**”.

- Essi sono **un tipo di bellezza che** “**sempre è e non nasce né muore, né cresce né svanisce**”.

- Noi possiamo conoscere questo tipo di bellezza **solo mediante l’intuizione intellettuale**, con la quale soltanto possiamo arrivare a “**quella particolare conoscenza che è conoscenza unicamente del bello in sé**”.

- La prima tradizione sulla bellezza matematica ha avuto un largo seguito tra i matematici, e in generale tra gli scienziati.

Dirac

- “La **bellezza dipende dalla propria cultura ed educazione** a un certo tipo di bellezza, pittura, letteratura, poesia, ecc.”.

- Ma “la **bellezza matematica è di tipo differente**. Direi anzi che è **di tipo completamente differente**, e **trascende questi fattori personali**. **È la stessa in ogni nazione e in ogni periodo di tempo**”.

- La prima tradizione sulla bellezza matematica, però, è **problematica** perché, contrariamente a quanto afferma **Dirac**, spesso **ciò che è considerato matematicamente bello in una certa epoca o cultura, non è considerato matematicamente bello in un'altra epoca o cultura**.

- In particolare, molti filosofi e matematici **caratterizzano differentemente la bellezza matematica**.

Platone

- “La **misura** e la **proporzione** si manifestano in ogni area come bellezza e virtù”. Infatti “nulla che sia bello manca di **proporzione**”.

- Dunque per **Platone** i caratteri della bellezza matematica sono la **misura** e la **proporzione**.

Aristotele

- “Le forme supreme della bellezza sono l’**ordine**, la **simmetria**, e la **definitezza**, e le **matematiche le fanno conoscere più di tutte le altre scienze**”.

- Dunque per **Aristotele** i caratteri della bellezza matematica sono l’**ordine**, la **simmetria**, e la **definitezza.**

Poincaré

“Gli enti matematici a cui attribuiamo il carattere della bellezza e dell’eleganza sono quelli i cui elementi sono disposti **armoniosamente**”.

“Questa **armonia**, ad un tempo, è una **soddisfazione dei nostri requisiti estetici** e un **aiuto per la mente**”.

Dunque per **Poincaré** il carattere della bellezza matematica è l’**armonia.**

Hardy

Nei teoremi belli “vi è un grado molto elevato di **sorpresa**, combinata con l’**inevitabilità** e l’**economia**”.

Dunque per **Hardy** i caratteri della bellezza matematica sono la **sorpresa**, l’**inevitabilità** e l’**economia.**

Hersh & John-Steiner

“Possiamo individuare tre importanti elementi della bellezza in un contenuto matematico: la **semplicità**, la **specificità concreta**, e l’inattesa o sorprendente **integrazione** o connessione di elementi disparati”.

Dunque per **Hersh** e **John-Steiner** i caratteri della bellezza matematica sono la **semplicità**, la **specificità concreta**, e l’**integrazione**.

- **Proporzione**, **ordine**, **simmetria**, **definitezza**, **armonia**, **sorpresa**, **inevitabilità**, **economia**, **semplicità**, **specificità**, **integrazione** sono proprietà differenti.

- L’esistenza di molte descrizioni differenti della bellezza matematica ha indotto alcuni a concludere:

Hofstadter

“**Non vi è alcun insieme di regole che definisca che cosa rende bella una cosa**, **né potrà mai esistere un tale insieme di regole**”.

La bellezza matematica come proiezione dell’osservatore: Kant

- Secondo l’interpretazione di **Kant** attualmente più diffusa, **Kant escluderebbe che si possa parlare di bellezza matematica**. Ma non è così.

Breitenbach

- Per Kant, “mentre le **proprietà matematiche** in sé **non sono belle**, è **la dimostrazione di tali proprietà** che **può essere oggetto di apprezzamento estetico**”.

Kant

- “La bellezza non è una qualità degli oggetti considerati in sé”.

- L’esperienza della bellezza matematica non consiste, come afferma **Platone**, in **un’intuizione intellettuale** di proprietà di enti matematici, “contiene soltanto **una relazione della rappresentazione dell’oggetto con il soggetto**”.

- Essa consiste nella **soddisfazione soggettiva** che noi proviamo di fronte alle **dimostrazioni di queste proprietà** in quanto mostrano “**un’armonia tra due facoltà cognitive, la sensibilità e l’intelletto**”.

- Possiamo “**chiamare bella una dimostrazione** di tali proprietà, perché mediante essa l’intelletto” e “l’immaginazione” si sentono “**rafforzati a priori** (il che, insieme alla precisione che è introdotta dalla ragione, si dice la sua **eleganza**): infatti qui almeno **la soddisfazione” è “soggettiva”**.

• La bellezza matematica come proiezione dell’osservatore, interpretazioni recenti

- **Rota** (1997),
- **McAllister** (2005),
- **Sinclair** (2004),
- **Todd** (2008).

Rota

- “La bellezza di un pezzo di **matematica dipende fortemente dalle scuole e dai periodi della storia**”. Dunque dipende dal contesto.

- Ma la bellezza “**non consiste semplicemente nel sentimento soggettivo provato da un osservatore**”.

- La bellezza **svolge un ruolo positivo nello sviluppo della matematica**, perché “**la mancanza di bellezza** in un pezzo di matematica è un caso frequente, e **dà impulso ad ulteriore ricerca**”.

- Uno sguardo anche superficiale “a una qualsiasi rivista di ricerca matematica confermerà che **molta ricerca matematica consiste proprio nel ripulire e raffinare teoremi e dimostrazioni di risultati già noti**”.

Rota

- Oltre a dipendere dal contesto, la bellezza matematica richiede "**familiarità con una grande quantità di materiale di sfondo**".

- Si può arrivare a tale familiarità solo "**a costo di tempo, sforzo, esercizio**".

- Perciò l'apprezzamento della bellezza matematica **non può essere istantaneo**.

- Dobbiamo evitare **'l'errore della lampadina'**, cioè dobbiamo evitare di credere che **l'apprezzamento della bellezza matematica** avvenga "in un lampo repentino, **come una lampadina che si accende di colpo**".

-

Rota

- Talora “i matematici affermano che **la ragion d’essere della matematica è la bellezza**”.

- Lo affermano perché **la verità non basta**.

- Noi possiamo seguire la dimostrazione di una proposizione matematica, e perciò possiamo “**verificarne la verità nel senso logico del termine, ma qualcosa manca ancora**”.

- “**La mera verità logica di una proposizione non ci illumina sul senso della proposizione**”.

- **“Quello che il matematico cerca è l’illuminazione [***enlightenment***] e non la verità**”.

Rota

- Tuttavia "i matematici **raramente riconoscono esplicitamente** il fenomeno dell'**illuminazione**".

- Lo fanno perché "**l'illuminazione ammette gradi: alcune proposizioni sono più illuminanti di altre**".

- Ma "**ai matematici non piacciono i concetti che ammettono gradi**".

- Invece **la bellezza** "**non ammette gradi**". Perciò i **matematici parlano di 'bellezza' invece che di 'illuminazione'**.

Rota

- Così i matematici "dicono che una dimostrazione è **bella** quando" essa è **illuminante**, cioè "quando ci porta a **percepire l'inevitabilità della proposizione dimostrata**".

- Essi dicono che un teorema è **bello** quando il teorema "**sparge luce intorno a sé**, **come** una *Lichtung*, **una radura nei boschi**".

- Ma quando i matematici "dicono che **un teorema è bello**", in realtà "**intendono dire che il teorema è illuminante**".

Limiti della posizione di Rota

(I)

- Rota afferma che **la bellezza svolge un ruolo positivo nello sviluppo della matematica**.

- Omette di dire, però, che **la ricerca della bellezza può anche essere un ostacolo allo sviluppo della scienza**.

- Per esempio, l'attuale teoria dell'elettrodinamica quantistica fa uso di un procedimento matematico, la **rinormalizzazione**, che porta a **previsioni accuratissime**, ma è **matematicamente scorretto.**

Dirac

- Sebbene la rinormalizzazione “abbia avuto molto successo nel formulare regole per trattare gli infiniti e sottrarli”, la “**teoria risultante è brutta e incompleta**” e perciò “non può considerarsi una soluzione soddisfacente del problema dell’elettrone”.

- Tale teoria “richiede di **trascurare gli infiniti** che compaiono nelle sue equazioni, **trascurandoli in un modo arbitrario**”,

- “**Questa non è matematica sensata**. La matematica sensata comporta trascurare una quantità **quando è piccola**, non trascurarla solo perché è **infinitamente grande** e **non la si vuole**!”

- Perciò **Dirac** sviluppò una teoria alternativa **bella**, matematicamente corretta. Ma la sua teoria **bella non** portava a **predizioni accurate**.

(II)

- **Rota** afferma che, quando i matematici parlano di bellezza matematica, in realtà intendono parlare di **illuminazione**.

- Ma **Rota non spiega cosa intende per ‘illuminazione’**.

(III)

- Rota afferma che i matematici parlano di bellezza matematica perché, a differenza dell'illuminazione, **la bellezza non ammette gradi**, e i matematici non amano i concetti che ammettono gradi.

- Ma**la bellezza, compresa la bellezza matematica, ammette gradi**, come è evidente dal fatto che diciamo comunemente che **una cosa è più bella di un'altra**.

- Per quanto riguarda la bellezza matematica, una prova del fatto che essa ammette gradi **è un sondaggio tra i lettori** della rivista ***The Mathematical Intelligencer*** che valutarono la **bellezza** di 24 **teoremi** su **una scala da 0 a 10**.

Bellezza e percezione

- Prima di proporre un rimedio ai limiti della posizione di Rota, occorre considerare un'**obiezione preliminare al concetto di bellezza matematica**.

van Gerwen

- "**La bellezza essenzialmente comporta un'esperienza percettiva**".
- Infatti "si può dimostrare che **la bellezza esiste nella percezione**".
- Invece, "il riconoscimento di qualcosa che potrebbe contare come **bellezza matematica non ha nulla a che fare con la percezione**".
- Perciò nella matematica non c'è posto per la bellezza, e "**parlare di bellezza matematica è esprimersi in modo non rigoroso**".

- Questa obiezione è ingiustificata perché la bellezza non comporta necessariamente un’esperienza percettiva.

Kant

- “**È bello ciò che piace nel mero giudicare (non nella sensazione né attraverso un concetto**)” .

- L’obiezione implica non solo che **non vi è bellezza matematica**, ma anche che **non vi è bellezza letteraria**, perché il riconoscimento di qualcosa che potrebbe contare come bellezza letteraria ha poco a che fare con la percezione.

- Certo, per leggere un romanzo, devo poter vedere il testo davanti a me, ma non si può dire che la mia esperienza estetica nel leggere un romanzo consista nel **decifrare le parole sulla pagina di fronte a me**.

- Né io vedo letteralmente i fatti narrati nel romanzo, li **immagino** soltanto, e l’**immaginazione** è la capacità di rappresentarmi qualcosa anche quando **essa non è presente davanti ai miei occhi**.

- D’altra parte, però, **sarebbe difficile negare che vi sia bellezza letteraria**.

- Perciò è **ingiustificato dire che la bellezza essenzialmente comporta un’esperienza percettiva**.

Bellezza ed evoluzione

- Si devono distinguere **due sensi della bellezza**: **un senso innato e un senso acquisito**. Il primo è un risultato **dell’evoluzione biologica**, il secondo **dell’evoluzione culturale**.

- Una prova dell’esistenza di **un senso della bellezza innato** è che **i neonati preferiscono le facce attraenti**.

Slater et al.

- “**La preferenza per le facce attraenti** è presente **subito dopo la nascita**, e non è il risultato di un lungo periodo di osservazione di facce”.

- Il senso della bellezza innato è fondamentale per come **conosciamo il mondo e ci adattiamo ad esso**.

- Esso determina quale **attenzione** prestiamo ad elementi dell'ambiente, quale **valore** attribuiamo ad essi, e quali **azioni** compiamo in risposta ad essi.

- In particolare, il senso della bellezza innato aiuta ad adottare comportamenti opportuni riguardo alla **nutrizione**, all'**allevamento**, alla ricerca di **compagni** adeguati e di **habitat** adeguati.

- Sulla base del senso della bellezza innato, che è un prodotto dell'evoluzione biologica, si sviluppa il **senso della bellezza acquisito**.

- Esso è un prodotto dell'**evoluzione culturale**, e riguarda non solo **oggetti naturali** ma anche **oggetti culturali**, come quelli dell'arte, della letteratura, della matematica, della scienza, ecc.

- In un certo senso **l'esperienza della bellezza matematica è il caso più estremo di esperienza della bellezza che è un risultato dell'evoluzione culturale**.

Bellezza e cervello emotivo

- L’apprezzamento della **bellezza matematica** si basa sull’attività di **quella stessa parte del cervello emotivo** su cui si basa **ogni altro tipo di bellezza**.

- Esperimenti di neuroimmagine condotti su un gruppo di matematici hanno mostrato che:

Zeki et al.

- “L’esperienza della **bellezza matematica** è associata ad attività nelle **stesse aree del cervello che sono attive** durante l’esperienza della **bellezza visiva, musicale e letteraria**”.

Dall’illuminazione alla comprensione

- Come si è detto, un limite di **Rota** è che non spiega che cosa intende per ‘illuminazione’.

- In realtà ‘illuminazione’ non è la parola più opportuna da usare in questo contesto.

- Infatti ‘**illuminare**’ significa ‘**rischiarare con la propria luce**’, e questa espressione suggerisce che l’apprezzamento della bellezza matematica avvenga in un lampo repentino, come **una lampadina che si accende di colpo**.

- Questo è in contrasto con l’avvertimento di Rota che dobbiamo evitare l’errore della lampadina.

- Invece di ‘**illuminazione**’ è meglio parlare di ‘**comprensione**’, dicendo che una dimostrazione o un teorema matematico sono belli quando ci danno **comprensione**.

- Questo può sembrare strano perché di solito la comprensione non è associata alla bellezza.

- Ma qui per ‘comprensione’ si intende **il riconoscimento della appropriata conformità delle idee tra loro e con il tutto**.

- La **comprensione**, così intesa è una **proprietà estetica** perché un aspetto dell’apprezzamento della bellezza in un’opera d’arte è **il riconoscimento dell’appropriata conformità delle parti tra loro e con il tutto**.

Heisenberg

- Secondo un punto di vista risalente all'antichità, "l**a bellezza è l'appropriata conformità delle parti tra loro e con il tutto**".

- Per esempio, in un romanzo, la bellezza è l'appropriata conformità dei caratteri, delle scene, delle conversazioni, ecc., tra loro e con il tutto.

- Sostituendo 'illuminazione' con 'comprensione' si stabilisce una **stretta relazione tra l'intelligibile e il bello**.

- "Se il bello è concepito come la conformità delle parti tra loro e con il tutto, e se ogni comprensione è resa possibile da questa connessione formale,

- **l'esperienza del bello diventa virtualmente identica all'esperienza di connessioni che vengono comprese**".

Il rapporto aureo

- In un'opera d'arte, un tipo di appropriata conformità delle parti tra loro e con il tutto è il **rapporto aureo**.

- Due quantità si dicono **in rapporto aureo** se **la somma delle due quantità sta alla quantità maggiore come la quantità maggiore sta alla minore**.

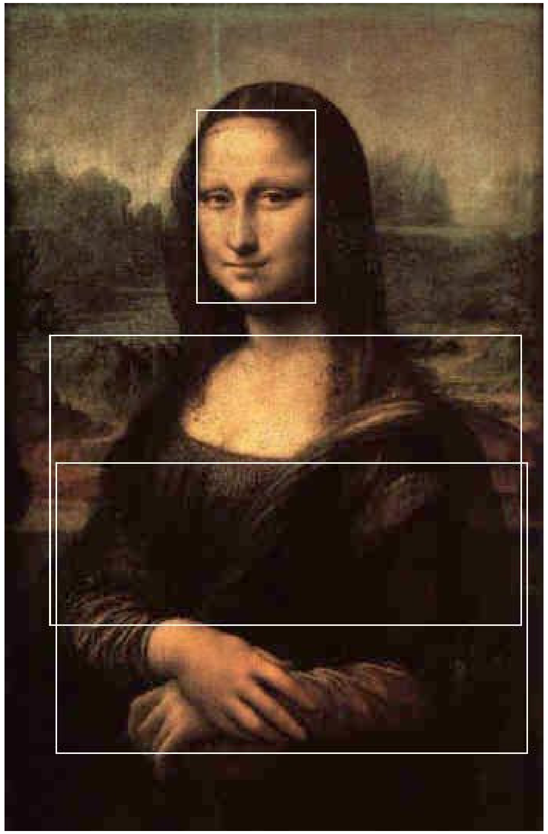
- Cioè, a e b, con $a>b$, sono in rapporto aureo se $a+b : a = a : b$

- **Si può dimostrare che il valore del rapporto aureo è 1.618.**

- **Rettangolo aureo**: rettangolo i cui lati sono in rapporto aureo.

- Il rettangolo aureo, e in generale il rapporto aureo, sono **presenti in molte opere d'arte**.

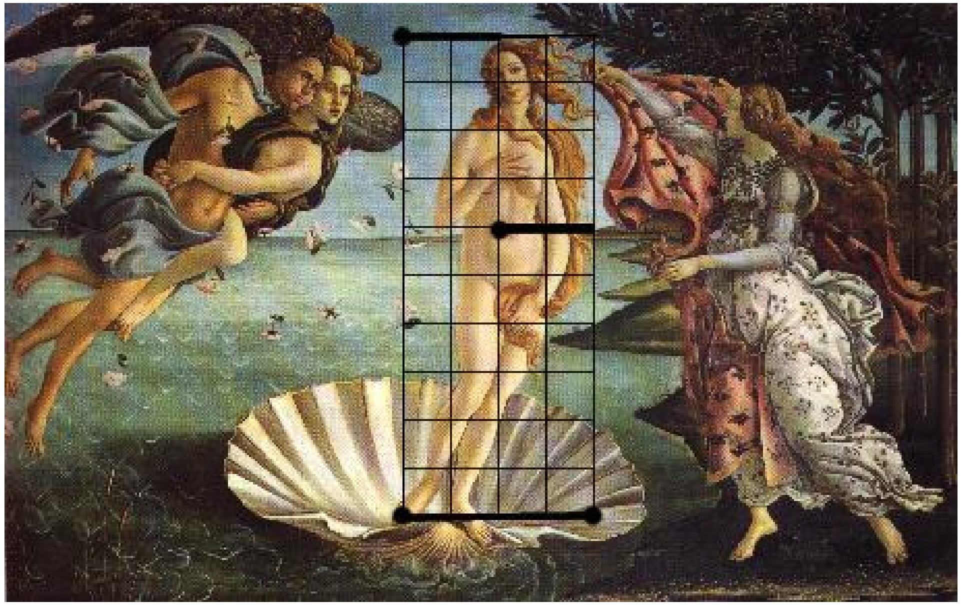
Leonardo da Vinci
Monna Lisa



- L'intero dipinto è un rettangolo aureo.

- Se si traccia un rettangolo intorno al viso di Monna Lisa, si vede che è un rettangolo aureo.

Botticelli
La nascita di Venere



- L’intero dipinto è un rettangolo aureo.

- L’altezza complessiva di Venere e l’altezza da terra dell’ombelico sono in rapporto aureo.

- Naturalmente la bellezza di una dimostrazione non può essere espressa in termini del rapporto aureo.

- Essa richiede il riconoscimento di **un altro tipo di conformità delle parti della dimostrazione** nella loro relazione tra loro e con il tutto.

Poincaré

- Anche quando il matematico ha **scomposto** "ogni **dimostrazione** in **un numero molto grande di operazioni elementari**" e si è "accertato che ciascuna di tali operazioni è **corretta**",

- egli può **non aver "afferrato il reale significato della dimostrazione"**

- perché **può non aver colto "ciò che fa della dimostrazione un tutto unitario"**.

- Quello che occorre per afferrare ciò che fa della dimostrazione un tutto unitario è la **comprensione**, cioè **il riconoscimento della appropriata conformità delle idee nella loro relazione tra loro e con il tutto**.

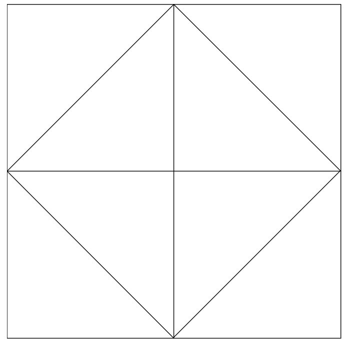
- Solo una dimostrazione bella permette di afferrarlo.

- Perciò, come dice **Rota**, solo una dimostrazione bella rivela il segreto del teorema e ci porta a percepire l'inevitabilità della proposizione dimostrata.

Esempio

- **Problema**: Costruire **un quadrato che sia metà di un quadrato dato**.

- Una soluzione è data dalla figura seguente, dove il **quadrato dato** è il **quadrato più grande**, e il quadrato che ha la forma di un **aquilone equilatero**, è **la sua metà**.

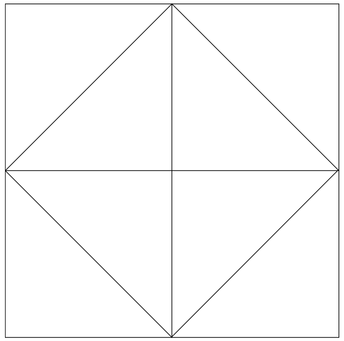


- Dalla figura si vede che il quadrato dato consiste di **otto triangoli rettangoli uguali**, mentre il quadrato che ha la forma di un aquilone equilatero consiste di **quattro triangoli rettangoli uguali**. Perciò è **metà** di quello dato.

- Questa dimostrazione è bella perché ci dà comprensione, e perciò ci fa percepire l'inevitabilità della proposizione dimostrata.

- Sostanzialmente la stessa dimostrazione si ottiene **piegando i quattro angoli** di un foglio quadrato **verso il centro** del foglio.

- La stessa figura viene usata da **Platone** nel **Menone** per risolvere il **problema inverso**: Costruire un quadrato che sia il **doppio** di un quadrato dato.



- Il **quadrato dato** sia **uno dei quattro quadrati più piccoli**.

- Dalla figura si vede che il quadrato avente la forma di aquilone equilatero è il suo doppio.

- Infatti esso consiste di **quattro triangoli rettangoli eguali**, mentre il quadrato dato consiste di **due triangoli rettangoli eguali**.

- Molti matematici hanno sottolineato che vi sono **differenze significative tra le dimostrazioni dal punto di vista della comprensione**.

Atiyah

- "Mi ricordo di un teorema che avevo **dimostrato**, e però **non riuscivo a vedere perché era vero**".

- Ma "cinque o sei anni dopo **capii perché doveva essere vero**. Allora, usando tecniche molto differenti, ne diedi **una dimostrazione completamente differente**" che rese "del tutto evidente **perché il teorema doveva essere vero**".

Auslander

- Mentre "si suppone che **una dimostrazione spieghi il risultato**, si deve ammettere che non tutte le dimostrazioni soddisfano questo requisito".

- Questo ha "spesso portato a sviluppare **nuove dimostrazioni, più comprensibili**".

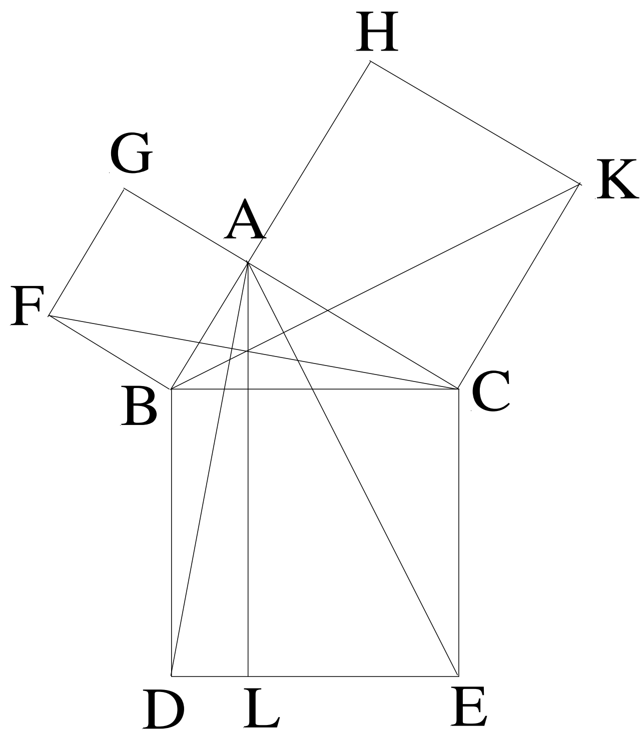
- Poiché, come osservano **Atiyah** e **Auslander**, vi sono differenze significative tra le dimostrazioni dal punto di vista della comprensione, vi sono **differenze significative tra le dimostrazioni dal punto di vista della bellezza**.

.

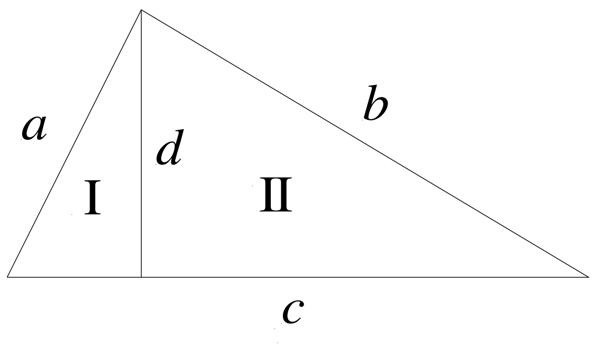
Esempio: Teorema di Pitagora

- **Problema**: Mostrare che il quadrato sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati sui cateti

- **Prima dimostrazione** (**Euclide**, *Elementi*, **I. 47**).



- **Seconda dimostrazione** (**Euclide**, *Elementi*, **VI.31**),



- La **prima dimostrazione** (**Euclide I.47**) **è goffa**.

Schopenhauer

- "La dimostrazione **zoppicante**, anzi **insidiosa**, di **Euclide** ci lascia **senza una spiegazione del perché**".

- "In essa **si tracciano linee senza alcuna indicazione del perché**" e il lettore "deve ammettere con stupefazione **cose che rimangono del tutto incomprensibili nel loro funzionamento interno**".

- La **seconda dimostrazione** (**Euclide VI.31**) è bella in quanto ci fa vedere **la ragione per cui il teorema vale**, cioè che il triangolo rettangolo sull'ipotenusa è simile ai triangoli rettangoli sui cateti. Perciò ci dà **comprensione**.

- Vi sono differenze significative tra le dimostrazioni dal punto di vista della bellezza non solo nel caso di dimostrazioni **geometriche** ma anche in quello di dimostrazioni **non geometriche**.

Esempio: irrazionalità di √2

- **Problema**: Mostrare che √2 non è esprimibile come una frazione.

- **Prima dimostrazione (Euclide**, ***Elementi***, **X**, **appendice 27**).

- **Seconda dimostrazione** (basata sull'**univocità** della **scomposizione in fattori primi**).

- La prima dimostrazione non rivela perché √2 non può essere una frazione, **la seconda dimostrazione lo rivela**.

- Vi sono differenze significative dal punto di vista della bellezza anche tra i teoremi.

- Un **teorema** è bello se fornisce **comprensione**, cioè, se permette di riconoscere la conformità delle idee che compaiono nel teorema l’una con l’altra e con il tutto.

- Un esempio di teorema bello è **l'identità di Eulero**: $e^{i\pi} + 1 = 0$.
- $i = \sqrt{-1}$
- $\pi = 3.14159...$ il rapporto della circonferenza di un cerchio con il diametro
- $e = 2.71828...$, la base dei logaritmi naturali, definita da $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

- Il già citato **sondaggio dei lettori** di ***The Mathematical Intelligencer*** elesse l'identità di Eulero come teorema matematico più bello in assoluto.

Zeki et al.

- Esperimenti di **neuroimmagine** condotti su un gruppo di matematici hanno mostrato che

- "la **formula coerentemente considerata come la più bella**, sia prima che durante le scannerizzazioni, è l'identità di **Eulero**".

- L'identità di Eulero $e^{i\pi} + 1 = 0$ è bella perché ci fa riconoscere la **relazione tra cinque dei più importanti numeri della matematica**:

$$0\,,\,1\,,\,i\,,\,\pi\,,\,e$$

- Essa ci fa anche riconoscere una **relazione tra le tre parti più importanti della matematica**: l'**algebra**, la **geometria**, e l'**analisi**.

- Infatti 0, 1, i provengono dall'**algebra**,

- π dalla **geometria**,

- e dall'**analisi**.

Bellezza e scoperta

- Sebbene la bellezza possa essere un ostacolo allo sviluppo della scienza, essa può avere un **ruolo positivo nello sviluppo della matematica**.

- Non solo, come dice **Rota**, la bellezza può spingere a **cercare nuove dimostrazioni di risultati già noti**.

- Essa può avere un **ruolo importante nel processo della scoperta matematica**.

- Nell’ultimo secolo si è ampiamente ritenuto che, nella matematica e nella scienza in generale, si debbano distinguere due contesti, il **contesto della scoperta** e il **contesto della giustificazione**.

Reichenbach

- Il **contesto della scoperta** “**non può essere analizzato precisamente**”.

- Perciò “il contesto della scoperta **dev’essere lasciato all’analisi psicologica**”,

- e l’**epistemologia** (o teoria della conoscenza) **deve occuparsi solo “del contesto della giustificazione”**.

- Questo punto di vista è ingiustificato, perché **il contesto della scoperta può essere analizzato precisamente**.

- Esso può essere analizzato con un metodo noto fin dall'antichità, il **metodo analitico**.

- Tale metodo fu usato per la prima volta da **Ippocrate di Chio** nella soluzione del problema della **duplicazione del cubo** e del problema della **quadratura di certe lunule**.

- Esso fu poi formulato esplicitamente e adottato come metodo della filosofia da **Platone** nel **Menone**, nel **Fedone** e nella **Repubblica**.

Metodo analitico

- Per risolvere un problema, si formula un’ipotesi che, se fosse valida, porterebbe a una soluzione del problema.

- L'ipotesi si ottiene dal problema, ed eventualmente da altri dati già disponibili, mediante qualche regola **non-deduttiva** (**induzione**, **analogia**, ecc.).

- L’ipotesi deve essere **plausibile**, cioè, deve essere in accordo con i dati esistenti.

- Ma l’ipotesi è a sua volta un problema che deve essere risolto, e viene risolto nello stesso modo, e così via.

- Ora, **mediante regole non-deduttive, si possono generare moltissime ipotesi** per risolvere un problema.

- **Sarebbe impossibile verificare la plausibilità** di ciascuna di esse, e sceglierne una che risulti plausibile.

- **Il senso della bellezza può guidarci nello scegliere tra le varie ipotesi**, suggerendoci di quali ipotesi controllare la plausibilità e quali invece trascurare.

- Perciò **la bellezza matematica può avere un ruolo nel contesto della scoperta**.

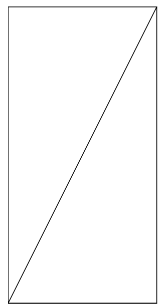
- Naturalmente **nella assicura che le ipotesi trovate in base al senso della bellezza siano plausibili**. Questo richiede una apposita verifica. Però **ci guida nella scelta**.

Esempio (Papiro di Rhind, Problema 51)

- Scoperta, da parte di un ignoto **matematico egiziano**, che
- **l’area di un triangolo qualsiasi è metà della base per l’altezza**.

- Il matematico egiziano osserva che, **da un triangolo rettangolo, si può** “**ottenere il suo rettangolo**”.

- Cioè, **da un triangolo rettangolo si può ottenere un rettangolo avente la stessa base e la stessa altezza**.



- Siccome l’area del rettangolo è **la base per l’altezza**, l’area del triangolo rettangolo sarà **metà della base per l’altezza**.

- Dal fatto che l’area del triangolo rettangolo è **metà della base per l’altezza** si potrebbero inferire varie ipotesi, per esempio che l’area del triangolo **isoscele** è metà della base per l’altezza.

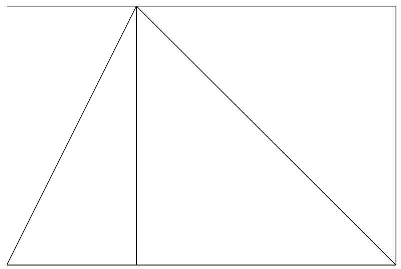
- Ma il matematico egiziano preferisce inferire, e sceglie, un’ipotesi più generale, cioè che l’area di un triangolo **qualsiasi** è metà della base per l’altezza.

- Questa ipotesi si ottiene **per induzione** dal fatto che l’area del triangolo rettangolo è metà della base per l’altezza.

- Il matematico egiziano sceglie questa ipotesi perché è la più bella – la più bella, perché permette di riconoscere **la relazione tra tre importanti parametri di qualsiasi triangolo: base, altezza, e area**. Perciò dà comprensione.

- Non solo l'ipotesi in questione è la più bella, ma è anche facile verificarne la plausibilità.

- A tale scopo, il matematico egiziano osserva che, **tracciando una perpendicolare, qualsiasi triangolo può essere diviso in due triangoli rettangoli**.
- D'altro canto, **ciascuno di questi due triangoli rettangoli può essere trasformato in un rettangolo con la stessa base e la stessa altezza**.



- Perciò **l'intero triangolo può essere trasformato in un rettangolo con la stessa base e la stessa altezza**.
- Poiché l'area del rettangolo è la base per l'altezza, l'area dell'intero triangolo sarà metà della base per l'altezza.
- La dimostrazione così ottenuta è **bella** in quanto **spiega perché l'area di un triangolo è metà della base per l'altezza**, e perciò dà comprensione.

Conclusione

- Fin dagli inizi **la ricerca della bellezza è stata una delle ragioni per fare matematica**.

Plutarco

- **Archimede** concentrò i suoi sforzi "**esclusivamente su quegli studi** la cui sottigliezza e **bellezza** non sono **contaminati dalle necessità pratiche**".

- Questo non significa che la ricerca della bellezza sia un fine in sé.
- Al contrario, essa è **strumentale allo sviluppo della matematica**.
- Questo viene spesso trascurato o negato.

Todd

- "I giudizi **estetici** e la **valutazione delle teorie scientifiche** sono **strani compagni**, e giustamente la loro congiunzione è **oggetto di sospetto**".

- Infatti "**l'apprezzamento estetico e la soddisfazione epistemica sono cose distinte**", e perciò si deve "**evitare di far ricadere l'uno nell'altra**".

- Ma questo equivale a restringere l’epistemologia alla **valutazione delle teorie scientifiche**, quindi al contesto della **giustificazione**,

- ed equivale ad assumere che i fattori estetici **non possano svolgere alcun ruolo epistemico in quanto** fattori estetici.

- In effetti, se si restringe l’epistemologia al contesto della giustificazione, allora i fattori estetici **non possono avere alcun ruolo epistemico in assoluto**, e non solo in quanto fattori estetici.

- Ma restringere l’epistemologia al contesto della giustificazione è infondato.

- La bellezza matematica può avere un ruolo nel contesto della scoperta, perché ci può guidare nello scegliere quali ipotesi considerare e quali trascurare.

- Perciò i fattori estetici possono avere un ruolo epistemico **in quanto** fattori estetici.

∎